

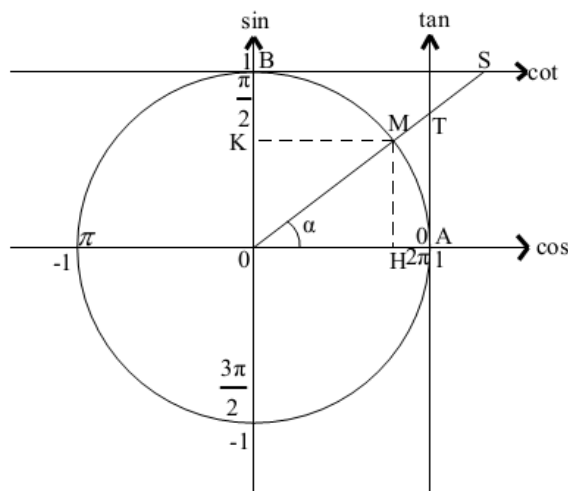
CHƯƠNG I: HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§ 0. HỆ THỐNG LẠI CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC LỚP 10

1. Các hằng đẳng thức đáng nhớ:

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
4. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
5. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
6. $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
7. $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

2. Định nghĩa giá trị lượng giác:



$$\sin \alpha = \overline{OK}$$

$$\cos \alpha = \overline{OH}$$

$$\tan \alpha = \overline{AT}$$

$$\cot \alpha = \overline{BS}$$

3. Các giá trị lượng giác đặc biệt:

	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

4. Các công thức lượng giác cơ bản:

$$1) \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$2) \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$3) \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

$$4) \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$5) 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$6) 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

5. Công thức cộng:

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b \quad \cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \quad \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

6. Công thức nhân đôi:

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\text{Hệ quả: } \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$$

7. Công thức hạ bậc:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} \quad \tan^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$$

8. Công thức nhân ba:

$$\sin 3a = 3 \sin a - 4 \sin^3 a$$

$$\cos 3a = 4 \cos^3 a - 3 \cos a$$

9. Công thức biến đổi tích thành tổng:

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \quad \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \quad \sin a \sin b = \frac{-1}{2} [\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a-b) + \sin(a+b)] \quad \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

10. Công thức biến đổi tổng thành tích:

$$\sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} \quad \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

11. Cung liên kết: Sin – bù; cos – đối; phụ – chéo; hơn kém π - tan, cot.

Hai cung bù nhau: α và $\pi - \alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	Hai cung đối nhau: α và $-\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
Hai cung phụ nhau: α và $\frac{\pi}{2} - \alpha$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$ $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$	Hai cung hơn kém π: α và $\alpha \pm \pi$ $\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha$ $\cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha$ $\tan(\alpha \pm \pi) = \tan \alpha$ $\cot(\alpha \pm \pi) = \cot \alpha$
Hai cung hơn kém $\frac{\pi}{2}$: α và $\alpha + \frac{\pi}{2}$ $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$ $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin \alpha$ $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\cot \alpha$ $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\tan \alpha$	Hệ quả: $\sin(x + k\pi) = \begin{cases} \sin x & k \text{ chẵn} \\ -\sin x & k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\cos(x + k\pi) = \begin{cases} \cos x & k \text{ chẵn} \\ -\cos x & k \text{ lẻ} \end{cases}$ $\tan(x + k\pi) = \tan x \quad k \in \mathbb{Z}$ $\cot(x + k\pi) = \cot x \quad k \in \mathbb{Z}$

§1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Hàm số	Tập xác định	Tập giá trị	Tính tuần hoàn	Tính chẵn lẻ
--------	--------------	-------------	----------------	--------------

$y = \sin x$	$D = \mathbb{R}$	$[-1; 1]$	Chu kì 2π	Hàm số lẻ
$y = \cos x$	$D = \mathbb{R}$	$[-1; 1]$	Chu kì 2π	Hàm số chẵn
$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R}$	Chu kì π	Hàm số lẻ
$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$	Chu kì π	Hàm số lẻ

B. BÀI TẬP

Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sin 3x$

b) $y = \cos \frac{2}{x}$

c) $y = \cos \sqrt{x}$

d) $y = \sin \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

e) $y = \frac{1+\cos x}{\sin x}$

f) $y = \frac{3}{2\cos x}$

g) $y = \tan \left(x - \frac{\pi}{3} \right)$

h) $y = \cot \left(x + \frac{\pi}{6} \right)$

i) $y = \tan \left(2x - \frac{\pi}{6} \right)$

j) $y = \cot \left(3x - \frac{\pi}{3} \right)$

k) $y = \sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

a) $y = x \cos 3x$

b) $y = x^3 \sin 2x$

c) $y = x - \sin x$

d) $y = \frac{x^3 - \sin x}{x^2}$

e) $y = \frac{\cos 4x}{x^3}$

f) $y = x^2 + \sin 2x$

§2. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình $\sin x = a$ (1)

Phương pháp giải: Đưa phương trình (1) về dạng

$$\sin x = \sin a^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^0 + k.360^0 \\ x = 180^0 - a^0 + k.360^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Nhận xét:

1). Phương trình $\sin x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \leq a \leq 1$

2). Nếu dùng đơn vị radian:

$$(1) \Leftrightarrow \sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k.2\pi \\ x = \pi - \alpha + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

3). Tổng quát: $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k.2\pi \\ u = \pi - v + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

4). Nếu a không phải là một trong các giá trị lượng giác đặc biệt, ta có:

$$\sin u = a \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arcsin a + k.2\pi \\ u = \pi - \arcsin a + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

II. Phương trình $\cos x = a$ (2)

Phương pháp giải: Đưa phương trình (2) về dạng

$$\cos x = \cos a^0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a^0 + k.360^0 \\ x = -a^0 + k.360^0 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Nhận xét:

1). Phương trình $\cos x = a$ có nghiệm khi và chỉ khi: $-1 \leq a \leq 1$

2). Nếu dùng đơn vị radian:

$$(2) \Leftrightarrow \cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k.2\pi \\ x = -\alpha + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

3). Tổng quát: $\cos u = \cos v \Leftrightarrow \begin{cases} u = v + k.2\pi \\ u = -v + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

4). Nếu a không phải là một trong các giá trị lượng giác đặc biệt, ta có:

$$\cos u = a \Leftrightarrow \begin{cases} u = \arccos a + k.2\pi \\ u = -\arccos a + k.2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

III. Phương trình $\tan x = a$ (3)

Phương pháp giải: Đưa phương trình (3) về dạng

$$\tan x = \tan a^0 \Leftrightarrow x = a^0 + k.180^0 (k \in \mathbb{Z})$$

Nhận xét:

1). Phương trình $\tan x = a$ có nghiệm với mọi giá trị a.

2). Nếu dùng đơn vị radian:

$$(3) \Leftrightarrow \tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k.\pi (k \in \mathbb{Z})$$

3). Tổng quát: $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k.\pi (k \in \mathbb{Z})$

4). Nếu a không phải là một trong các giá trị lượng giác đặc biệt, ta có:

$$\tan u = a \Leftrightarrow u = \arctan a + k.\pi (k \in \mathbb{Z})$$

IV. Phương trình $\cot x = a$ (4)

Phương pháp giải: Đưa phương trình (4) về dạng

$$\cot x = \cot a^0 \Leftrightarrow x = a^0 + k.180^0 (k \in \mathbb{Z})$$

Nhận xét:

1). Phương trình $\cot x = a$ có nghiệm với mọi giá trị a.

2). Nếu dùng đơn vị radian:

$$(4) \Leftrightarrow \cot x = \cot \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k.\pi (k \in \mathbb{Z})$$

3). Tổng quát: $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k.\pi (k \in \mathbb{Z})$

4). Nếu a không phải là một trong các giá trị lượng giác đặc biệt, ta có:

$$\cot u = a \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} a + k.\pi (k \in \mathbb{Z})$$

☞ Lưu ý:

1. Cách chuyển hàm:

$$\sin \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\cos \alpha = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\tan \alpha = \cot \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

$$\cot \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

2. Cách loại dấu trừ:

$$-\sin \alpha = \sin(-\alpha)$$

$$-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$$

$$-\tan \alpha = \tan(-\alpha)$$

$$-\cot \alpha = \cot(-\alpha)$$

3. Các trường hợp đặc biệt:

$$\sin u = 1 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$$

$$\sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi$$

$$\cos u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi$$

B. BÀI TẬP

1. Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin x = \frac{1}{4}$

c) $\sin(x - 60^\circ) = \frac{1}{2}$

d) $\sin 2x = -1$

e) $\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

f) $\cos(2x + 50^\circ) = \frac{1}{2}$

g) $\cos(x - 2) = \frac{2}{5}$

h) $\tan \frac{2x}{5} = \tan \frac{2\pi}{7}$

k) $\tan(3x - 30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

l) $\cot\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

m) $\cot\left(\frac{x}{3} + 20^\circ\right) = \sqrt{3}$

n) $\cot\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \tan \frac{\pi}{6}$

Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin(x + 2) = \frac{1}{3}$

c) $\sin 3x = 1$

d) $\sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

e) $\cos(x - 1) = \frac{2}{3}$

f) $\cos 3x = \cos 12^\circ$

g) $\cos\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$

h) $\sin(2x + 20^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

i) $\cos(2x + 25^\circ) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

j) $\cot(4x + 2) = -\sqrt{3}$

$$k) \tan(x + 15^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$l) \cos 3x = \sin 4x$$

$$m) 2 \sin(3x + 60^\circ) - \sqrt{2} = 0$$

$$n) \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x$$

$$b) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c) \cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$$

$$e) 8 \cos 2x - 12 = 0$$

$$f) \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$g) 3 \cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0$$

$$h) \tan(2x - 15^\circ) = 1$$

$$i) \cos(4x - 30^\circ) = \cos 30^\circ$$

Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x$$

$$b) \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(\pi - 3x)$$

$$c) \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$d) \cos 3x - \sin 2x = 0$$

$$e) \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$f) \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$$

$$g) \sin(2x + 50^\circ) = \cos(x + 120^\circ)$$

Giải các phương trình lượng giác sau:

$$a) 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{2} = 0$$

$$b) \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$c) 2 \tan 3x + 5 = 0$$

$$d) \sqrt{3} \cot 2x - 1 = 0$$

$$e) 2 \cos 5x + \sqrt{3} = 0$$

$$f) 2\sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{6} = 0$$

$$g) 1 - 2 \sin(x - 30^\circ) = 0$$

$$h) \sin 2x + \cos x = 0$$

$$i) 2 \sin^2 \frac{x}{3} - 1 = 0$$

$$j) (1 + \cos 2x)(3 - \cos x) = 0$$

$$k) \sin^2 2x + \cos^2 x = 1$$

$$l) \sin^2 3x + \sin^2 x = 1$$

$$m) \cos^2 5x - \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$$

$$n) 4 \sin x \cdot \cos x + 1 = 0$$

$$o) \cos^2 2x = \frac{1}{4}$$

$$p) \sin^2 2x + \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

§3. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THƯỜNG GẶP

A- KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác:

Dạng:

$$a \sin^2 x + b \sin x + c = 0$$

$$a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$$

$$a \tan^2 x + b \tan x + c = 0$$

$$a \cot^2 x + b \cot x + c = 0$$

Đặt: $t = \sin x (t = \cos x) \rightarrow$ Điều kiện $-1 \leq t \leq 1$

$t = \tan x (t = \cot x) \rightarrow$ Không có điều kiện t.

II. Phương trình thuần nhất bậc hai:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = 0 (*)$$

TH1: $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($\sin^2 x = 1$) thế vào (*)

TH2: $\cos x \neq 0$. Chia 2 vế (*) cho $\cos^2 x$ ta được phương trình bậc 2 theo $\tan x$

Lưu ý: Phương trình $a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d$ với $d \neq 0$ có thể đưa về dạng (*) như sau:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d$$

$$\Leftrightarrow a \sin^2 x + b \sin x \cdot \cos x + c \cos^2 x = d(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

III. Phương trình bậc nhất đối với sinx và cosx : $a \sin x + b \cos x = c$.

Chia 2 vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$ ta được:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Vì $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$ nên tồn tại 1 cung α sao cho

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

Khi đó phương trình trở thành:

$$\sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Điều kiện có nghiệm: $\left| \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{a^2 + b^2 \geq c^2}$

Lưu ý: $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$

IV. Phương trình đối xứng và phản xứng : $a(\sin x \pm \cos x) + b \sin x \cos x + c = 0$

Đặt :

• $t = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

• $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \rightarrow$ Điều kiện $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$\Rightarrow \sin x \cos x = \frac{1 - t^2}{2}$$

B- BÀI TẬP

1. Giải các phương trình lượng giác (phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác).

a) $\sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0$

b) $2 \cos^2 3x - \sqrt{2} \cos 3x = 0$

c) $4 \sin^2 2x - 3 \sin 2x - 1 = 0$

d) $\cos 2x - \sin x - 1 = 0$

e) $\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

f) $2 \cos^2 5x - 2 \sin 5x + 2 = 0$

g) $5 \sin^2 x + 3 \cos x + 3 = 0$

h) $2 \cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$

k) $\sin^2 2x - 13 \sin 2x + 5 = 0$

l) $2 \cos^2 x - 5 \cos x + 3 = 0$

m) $\sin 2x + 2 \cos 4x + 1 = 0$

n) $2 \sin^2 \frac{x}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{x}{2} - 2 = 0$ o) $\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \cos \frac{x}{2} + 2 = 0$ p)

$8 \cos^2 x + 2 \sin x - 7 = 0$

q) $2 \tan^2 x + 3 \tan x + 1 = 0$

r) $1 + \cos 4x = \cos 2x$

s) $\cos 2x + 9 \cos x + 5 = 0$

t) $2 \sin^2 2x + \sqrt{3} \cos 2x + 1 = 0$

u) $\cos 2x - 3 \cos x = 4 \cos^2 \frac{x}{2}$

Giải các phương trình lượng giác (phương trình bậc hai theo một hàm số lượng giác).

- a) $\cos 2x - 3\sin x + 2 = 0$ b) $\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$
c) $4\sin^2 2x - 8\cos^2 x + 3 = 0$ d) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$
e) $\cot^2 \frac{x}{2} + 4\cot \frac{x}{2} + 3 = 0$
f) $4\cos^2 2x - 2(1 + \sqrt{3})\cos 2x + \sqrt{3} = 0$
g) $\cos^2 x + \sin x + 1 = 0$ h) $\sin^3 x + 3\sin^2 x + 2\sin x = 0$
i) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$

Giải các phương trình lượng giác (phương trình thuần nhất bậc hai đối với $\sin x$ và $\cos x$)

- a) $3\sin^2 x + 8\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$
b) $\sin^2 x - 8\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$
c) $4\cos^2 x + 3\sin x \cos x - \sin^2 x = 3$
d) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$
e) $4\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 1$
f) $\cos^2 x + \sin 2x + 5\sin^2 x = 2$
g) $3\cos^2 - 2\sin 2x + \sin^2 x = 1$
h) $4\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 3\sin^2 x = 1$
i) $2\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x = 3$
k) $\sqrt{3}\sin^2 x + \sin 2x - \sqrt{3}\cos^2 x = 1$
l) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x + 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$
m) $2\sin^2 x + \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$
n) $3\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 5\cos^2 x = 2$
o) $\sin^2 x + \sin 2x - 2\cos^2 x = \frac{1}{2}$
p) $2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$
q) $\sin^2 x - 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$
s) $\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x + 1 = 0$
t) $\sin^2 x - \sqrt{3}\sin x \cos x + 2\cos^2 x - 2 = 0$
u) $4\sin^2 x + 3\sqrt{3}\sin 2x - 2\cos^2 x = 4$

Giải các phương trình lượng giác (phương trình bậc nhất đối với $\sin x$ và $\cos x$).

- a) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$ b) $\cos 3x - \sin 3x = 1$
c) $2\cos x - \sin x = 2$ d) $4\cos \frac{x}{2} + 3\sin \frac{x}{2} = 5$
e) $\sin 5x + \cos 5x = -1$ f) $3\sin x - 4\cos x = 1$
g) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{2}$ h) $\sin x + \cos x = \frac{\sqrt{6}}{2}$
k) $\sin x - \cos x = 1$ l) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
m) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$ n) $3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 3$
o) $3\sin x - 4\cos x - 5 = 0$ p) $\sqrt{3}\cos x + \sin x = -2$
q) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$ r) $\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1$
s) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$ t) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\sin 2x$
u) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 2\cos 3x$ v) $\sin 5x + \sqrt{3}\cos 5x = -4$
w) $3\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = -4$

Giải các phương trình lượng giác (phương trình đối xứng và phản xứng)

- a) $2(\sin x + \cos x) + 6\sin x \cos x - 2 = 0$
b) $\sin x + \cos x - 2\sin x \cos x = 1$

- c) $2(\sin x + \cos x) + 3\sin 2x = 2$
b) $3(\sin x + \cos x) + 2\sin 2x = -3$
c) $1 + \sin x - \cos x - \sin x \cos x = 0$
d) $\cos x - \sin x + 3\sin 2x - 1 = 0$
e) $2\sin 2x - 3\sqrt{3}(\sin x + \cos x) + 8 = 0$
f) $(1 - \sqrt{2})(1 + \sin x + \cos x) = \sin 2x$
g) $\sin x + \cos x - 4\sin x \cos x - 1 = 0$
h) $(1 + \sqrt{2})(\sin x + \cos x) - \sin 2x = 1 + \sqrt{2}$
i) $\sin 2x - 4(\cos x - \sin x) = 4$
j) $5\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$
k) $\sin 2x + \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$
l) $\cos x - \sin x + 6\sin x \cos x = 1$
m) $\cos^3 x + \sin^3 x = \cos 2x$
n) $\cos^3 x + \sin^3 x = \sin 2x + \sin x + \cos x$
o) $2\cos^3 x + \cos 2x - \cos x = 0$
p) $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2}\sin 2x$
q) $\cos x - \sin x + \sin x \cos x + 6 = 0$
r) $\sin^3 x - \cos^3 x = 1 + \sin x \cos x$
s) $1 + \cos^3 x - \sin^3 x = \sin 2x$
t) $\cos^3 x - \sin^3 x = -1$
 $2\cos 2x + \sin^2 x \cos x + \cos^2 x \sin x = 2(\sin x + \cos x)$

§4. MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC KHÁC

1. Giải các phương trình sau: (đưa về phương trình tích)

$$A.B = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$$

- a) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$
b) $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$
c) $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$
d) $\sin 7x + \cos^2 2x = \sin^2 2x + \sin x$

Giải các phương trình sau: (dùng công thức hạ bậc $\rightarrow$ đưa về phương trình tích)

- a) $\sin^2 x = \sin^2 3x$
b) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$
c) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$

d) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x = \frac{3}{2}$

Giải các phương trình sau: (đưa về phương trình tích)

- a) $1 + 2\sin x \cos x = \sin x + 2\cos x$
b) $\sin x(\sin x - \cos x) - 1 = 0$
c) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos 2x$

$$d) \sin 2x = 1 + \sqrt{2} \cos x + \cos 2x$$

$$e) \sin x(1 + \cos x) = 1 + \cos x + \cos^2 x$$

$$f) (2\sin x - 1)(2\cos 2x + 2\sin x + 1) = 3 - 4\cos^2 x$$

$$g) (\sin x - \sin 2x)(\sin x + \sin 2x) = \sin^2 3x$$

$$h) \sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sqrt{2} (\cos x + \cos 2x + \cos 3x)$$

Giải các phương trình sau: (đưa về phương trình tích)

$$a) 2\cos x \cdot \cos 2x = 1 + \cos 2x + \cos 3x$$

$$b) 2\sin x \cdot \cos 2x + 1 + 2\cos 2x + \sin x = 0$$

$$c) 3\cos x + \cos 2x - \cos 3x + 1 = 2\sin x \cdot \sin 2x$$

$$d) \cos 5x \cdot \cos x = \cos 4x \cdot \cos 2x + 3\cos^2 x + 1$$

Giải các phương trình sau:

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) \\ a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab \end{cases}$$

$$a) \sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$$

$$b) \sin^8 x + \cos^8 x = 1$$

$$c) \cos^4 x + 2\sin^6 x = \cos 2x$$

Giải các phương trình sau:

$$a) \sin^3 x + \cos^3 x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x + \sin 3x$$

$$b) 1 + \sin 2x + 2\cos 3x(\sin x + \cos x) = 2\sin x + 2\cos 3x + \cos 2x$$

Giải các phương trình lượng giác sau: (**Phương trình lượng giác có điều kiện**)

Khi giải phương trình lượng giác ta phải đặt điều kiện nếu gặp một trong hai trường hợp sau:

1. Phương trình có chứa hàm số tang hoặc cotang (trừ phương trình bậc nhất và bậc hai theo 1 hàm số tang hoặc cotang)

- Phương trình có chứa $\tan x$: Điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- Phương trình có chứa $\cot x$: Điều kiện $x \neq k\pi$
- Phương trình có chứa cả $\tan x$ và $\cot x$: Điều kiện $x \neq k\frac{\pi}{2}$

2. Phương trình có chứa ẩn ở mẫu $\rightarrow$ Điều kiện: mẫu $\neq 0$

- $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$
- $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- $\tan x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$
- $\cot x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

$$a) \cos 2x \cot\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$b) (\cot 2x - 1)(\cot 3x + 1) = 0 \quad c) \sin 3x(\cot x + 1) = 0 \quad d)$$

$$\cos 2x \tan x = 0$$

$$e) \sin 3x \cot x = 0$$

$$f) \tan x \tan 2x = -1$$

$$g) \tan x = \cot 2x$$

$$h) \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + \cot x = 0$$

i) $\tan x - 2\cot x + 1 = 0$

j) $\sin^4 x + \cos^4 x - \cos^2 x + \frac{1}{4\sin^2 2x} - 1 = 0$

k) $\tan 3x + \tan x = 0$

l) $\frac{\tan 2x}{\tan x} + \frac{\tan x}{\tan 2x} = \frac{5}{2}$

m) $\tan x + \cot 2x = 2\cot 4x$

n) $\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} = 2\left(\cos x - \frac{1}{\cos x}\right) + 1$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC TRONG CÁC ĐỀ THI ĐẠI HỌC

1. (ĐH 2002A) Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = \cos 2x + 3$$

2. (ĐH 2002B) Giải phương trình $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

3. (ĐH 2002D) Tìm x thuộc đoạn $[0; 4]$ của phương trình

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

4. (ĐH 2003A) Giải phương trình $\cot x - 1 = \frac{\cos 2x}{1 + \tan x} + \sin^2 x - \frac{1}{2}\sin 2x$

5. (ĐH 2003B) Giải phương trình $\cot x + \tan x + 4\sin 2x = \frac{2}{\sin 2x}$

6. (ĐH 2003D) Giải phương trình $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$

7. (ĐH 2004B) Giải phương trình $5\sin x - 2 = 3(1 - \sin x)\tan^2 x$

8. (ĐH 2004D) Giải phương trình

$$(2\cos x - 1)(2\sin x + \cos x) = \sin 2x - \sin x$$

9. (ĐH 2005A) Giải phương trình $\cos^2 3x \cdot \cos 2x - \cos^2 x = 0$

10. (ĐH 2005B) Giải phương trình $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$

11. (ĐH 2005D) Giải phương trình

$$\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{3}{2} = 0$$

12. (ĐH 2006A) Giải phương trình

$$\frac{2(\cos^6 x + \sin^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$$

13. (ĐH 2006B) Giải phương trình $\cot x + \sin x\left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

14. (ĐH 2006D) Giải phương trình $\cos 3x + \cos 2x - \cos x - 1 = 0$

15. (ĐH 2007A) Giải phương trình

$$(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$$

16. (ĐH 2007B) Giải phương trình $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$

17. (ĐH 2007D) Giải phương trình $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2 + \sqrt{3}\cos x = 2$

18. (ĐH 2008A) Giải phương trình

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)} = 4\sin\left(\frac{7\pi}{4} - x\right)$$

19.(ĐH 2008B) Giải phương trình

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cdot \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cdot \cos x$$

20.(ĐH 2008D) Giải phương trình

$$2 \sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2 \cos x$$

21.(CĐ 2008A) Giải phương trình $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2 \sin 2x$

22.(ĐH 2009A) Giải phương trình $\frac{(1 - 2 \sin x) \cos x}{(1 + 2 \sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3}$

23.(ĐH 2009B) Giải phương trình

$$\sin x + \cos x \cdot \sin 2x + \sqrt{3} \cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x)$$

24.(ĐH 2009D) Giải phương trình $\sqrt{3} \cos 5x - 2 \sin 3x \cos 2x - \sin x = 0$

25.(CĐ 2009A+B+D) Giải phương trình

$$(1 + 2 \sin x)^2 \cos x = 1 + \sin x + \cos x$$

26.(ĐH 2010A) Giải phương trình

$$\frac{(1 + \sin x + \cos 2x) \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)}{1 + \tan x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x$$

27.(ĐH 2010B) Giải phương trình

$$(\sin 2x + \cos 2x) \cos x + 2 \cos 2x - \sin x = 0$$

28.(ĐH 2010D) Giải phương trình

$$\sin 2x - \cos 2x + 3 \sin x - \cos x - 1 = 0$$

29.(CĐ 2010A+B+D) Giải phương trình

$$4 \cos \frac{5x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2(8 \sin x - 1) \cos x = 5$$

30.(ĐH 2011A) Giải phương trình

$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \cot^2 x} = \sqrt{2} \sin x \cdot \sin 2x$$

31.(ĐH 2011B) Giải phương trình

$$\sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x = \cos 2x + \sin x + \cos x$$

32.(ĐH 2011D) Giải phương trình $\frac{\sin 2x + 2 \cos x - \sin x - 1}{\tan x + \sqrt{3}} = 0$

33.(CĐ 2011A+B+D) Giải phương trình $\cos 4x + 12 \sin^2 x - 1 = 0$

34.(ĐH 2012A) Giải phương trình $\sqrt{3} \sin 2x + \cos 2x = 2 \cos x - 1$

35.(ĐH 2012B) Giải phương trình

$$2(\cos x + \sqrt{3} \sin x) \cos x = \cos x - \sqrt{3} \sin x + 1$$

36.(ĐH 2012D) Giải phương trình

$$\sin 3x + \cos 3x - \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 2x$$

37.(CĐ 2012A+A1+B+D) Giải phương trình $2 \cos 2x + \sin x = \sin 3x$

38.(ĐH 2013 A+A1) Giải phương trình $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

39.(ĐH 2013B) Giải phương trình $\sin 5x + 2 \cos^2 x = 1$

40.(ĐH 2013D) Giải phương trình $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$

41.(CĐ 2013A+A1+B+D) Giải phương trình $\cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) + \sin 2x = 0$

42.(ĐH 2014 A+A1) Giải phương trình $\sin x + 4 \cos x = 2 + \sin 2x$

43.(ĐH 2014B) Giải phương trình $\sqrt{2}(\sin x - 2 \cos x) = 2 - \sin 2x$